ENSAH 2017/2018

CP1: Algebre I

TD N 4
Polynome et Fraction

Exercice 1: Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A_i par B_i :

1) $A_1 = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $B_1 = X^2 + 3X - 1$.
2) $A_2 = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $B_2 = X^2 - X - 7$
3) $A_3 = X^5 - X^2 + 2$ par $B_3 = X^2 + 1$.

Exercice 2: Déterminer les pgcd suivants:

1) $A_1 = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $B_1 = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$
2) $A_2 = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $B_2 = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.
3) $A_3 = X^n - 1$ et $B_3 = (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3: Déterminer le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n$ par $B = (X-1)^2(X-2)$

Exercice 4: Soit $P = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4$

1) Déterminer le pgcd (P, P')
2) Décomposer le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5: Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1) Déterminer le degré de P.
2) Vérifier que P admet au moins deux racines entiers.
3) Monter que $X - j$ divise P.
4) Décomposer P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6: Soit $a, b \in \mathbb{R}$

1) Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme
$$P = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$$ ayant un zéro d'ordre 3. 2) Décomposer les polynômes obtenus dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7: 1) Décomposer le polynôme $P = 4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$ sachant qu'il possède une racine multiple.

2) Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants sachant qu'ils ont une racine réelle commune :

$A = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ $\qquad B = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$.

* 2) a) Effectuer la division euclidienne de :
$A = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$ par $B = X^2 + 3X$

b) En déduire la factorisation de A dans $\mathbb{Q}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8 : On considère le polynôme $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1) Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. 2) En déduire la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9 : Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions suivantes :

$$F_1 = \frac{-X^3 + 5X^2 - 4X + 1}{X^3 (X-1)^4} \qquad \times\ F_2 = \frac{8X^4 + 8}{(X-1)^3 (X+1)^3}$$

$$\times\ F_2 = \frac{X^8 - 1}{(X^2 + 2X + 2)^3} \qquad F_4 = \frac{X^2 + 1}{X^4 + 1}$$

(*) Les exercices suivants sont facultatifs.

Exercice 10.

1) Déterminer les racines de $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant qu'elles sont en progression arithmétique.

2) Soit $Q = 2X^3 - X^2 - X - 3$

a) Déterminer une racine rationnelle de Q.

b) En déduire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$.

3) Décomposer le polynôme $R = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11 : 1) Décomposer en éléments simples la fraction $F = \dfrac{n!}{X(X+1)\ldots\ldots(X+n)}$

2) En duire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1}$.

Exercice

Détérminons les pgcd des polynôme suivantes:

1) $A_1 = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ $\qquad B_1 = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$

2) $A_2 = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ $\qquad B_2 = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$

3) $A_3 = X^n - 1$ et $B_3 = (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

1) On appliquant l'algoritme d'euclide :

$$
\begin{array}{rl|l}
+ & X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 & X^3 - 3X^2 + 3X - 2 \\
\cline{3-3}
 & -X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 2X & X \\
\cline{2-2}
 & -2X^2 + 2X + 4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
+ & X^3 - 3X^2 + 3X - 2 & -2X^2 + 2X + 4 \\
\cline{3-3}
 & -X^3 + X^2 + 2X & \frac{-1}{2}X + 1 \\
\cline{2-2}
 & -2X^2 + 5X - 2 & \\
 & 2X^2 - 2X - 4 & \\
\cline{2-2}
 & 3X - 6 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
+ & -2X^2 + 2X + 4 & 3X - 6 \\
\cline{3-3}
 & 2X^2 - 4X & \frac{-2}{3}X - \frac{2}{3} \\
\cline{2-2}
 & -2X + 4 & \\
 & 2X + 4 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

la dernière reste non nul et $R_2 = 3X - 6$ et donc

$\mathrm{Pgcd}(A_1, B_1) = 3X - 6$

2) on appliquant l'algorithme d'euclide.

$$\begin{array}{r|l}
X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 & X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2}
-X^5 + X^4 + 0X^3 - 2X^2 + 2X - 1 & 1 \\
2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 & 2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 \\ \cline{2-2}
-X^5 + 2X^4 - 2X^3 + X^2 & \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \\ \cline{1-1}
X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 & \\
-X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X & \\ \cline{1-1}
X^2 - X + 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 & X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2}
-2X^3 + 2X^2 - 2X & 2X + 2 \\ \cline{1-1}
-2X^2 + 2X - 2 & \\
2X^2 - 2X + 2 & \\
0 &
\end{array}$$

donc $pgcd(A_2, B_2) = X^2 - X + 1$

3) $A_3 = X^n - 1$ et $B_3 = (X-1)^n$ avec $n \geqslant 1$

les seuls diviseurs de B_3 sont tout de la forme

$\alpha_p = (X-1)^n$ avec $(\alpha_p \in \mathbb{R}^*$ et $1 \leq p \leq n$

Les seuls diviseur de A_3 de cette forme $\alpha(X-1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ donc $pgcd(A_3, B_3) = (X-1)$

Exercice 3 : Soit $n \geqslant 3$

Détérminons le reste de la dévision euclidienne de $A = X^n$ par $(X-1)^2(X-2)$

la dévision euclidienne de $A_n = x^n$ par $B = (X-1)^2(X-2)$ nous donne $A_n = B \times Q + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B = 3$

alors $R = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

on a : $A_n = X^n = (X-1)^2(X-2)Q + (aX^2 + bX + c)$

on remplace X par 1, on a $1 = a + b + c$

on dérive l'expression $A_n = (X-1)^2(X-2)Q + (aX^2 + bX + c)$

on obtient : $nX^{n-1} = 2(X-1)(X-2)Q + (X-1)^2((X-2)Q)' + 2aX + b$

on remplace X par 2 on obtient $2^n = 4a + 2b + c$

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ 2a+b = n \\ 4a+2b+c = 2^n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a+b+c = 1 \\ 2a+b = n \\ c = 2^n - 2n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a - 2 = n-1 \\ 2a+b = n \\ c = 2^n - 2n \end{matrix}$$

$a = c + n - 1 = 2^n - n - 1$

$b = n - 2a = n - 2^{n-1} + 2n + 2 = -2^{n+1} + 3n + 2$

$c = 2^n - 2n = 2^n - 2n$

donc $R = (2^n - n - 1)X^2 + (-2^{n+1} + 3n + 2)X + 2^n - 2n$

Exercice 4 :

Soit $P = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2$

1) Détérminons le pgcd de P et P'

on a : $P' = 6X^5 - 30X^4 + 60X^3 - 60X^2 + 24X$

on applique l'algorithe d'Euclide

$$\begin{array}{l|l} X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4 & \begin{matrix} X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 4X \\ = \\ 6X^5 - 30X^4 + 60X^3 - 60X^2 + 24X \end{matrix} \\ \hline -X^6 + 5X^5 - 10X^4 + 10X^3 - 4X^2 & X - 1 \\ \hline -X^5 + 5X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & X^6-6X^5+15X^4-20X^3+12X^2-4 & X^5-5X^4+10X^3-10X^2+4X \\
 & -X^6+5X^5-10X^4+10X^3-4X^2 & \overline{\quad X-1 \quad} \\
\hline
 & -X^5+5X^4-10X^3+8X^2-4 & \\
 & X^5-5X^4+10X^3-10X^2+4X & \\
\hline
R_1= & -2X^2+4X-4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
X^5-5X^4+10X^3-10X^2+4X & -2X^2+4X-4 \\
-X^5+2X^4-2X^3 & \overline{\frac{-1}{2}X^3+\frac{3}{2}X^2-X} \\
\hline
-3X^4+8X^3-10X^2+4X & \\
3X^4-6X^3+6X^2 & \\
\hline
2X^3-4X^2+4X & \\
-2X^3+4X^2-4X & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

le dernière reste est **non** nulle et donc $pgcd(P,P')=-2X^2+4X-4$

donc $pgcd(P,P')= X^2-2X+2$

2) Décomposons P dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$

on a X^2-2X+2/P et X^2-2X+2/P'

$P=(X^2-2X+2)Q$ et $P'=(X^2-2X+2)R$

soit $X^2-2X+2\in\mathbb{C}[X]$

$\Delta(X^2-2X+2)=-4<0$

donc il admet deux racine complexe conjuguées α et $\bar{\alpha}$

$P(\alpha)=0$ et $P(\bar{\alpha})=0$ et $\alpha,\bar{\alpha}$ sont des racines P d'ordre de multiplicité au moins égale á 2

$\Rightarrow P=(X-\alpha)^2(X-\bar{\alpha})^2S=((X-\alpha)(X+\alpha))^2S=(X^2-2X+2)^2S$

$(X^2-2X+2)^2=X^4-4X^3+8X^2-8X+4$

Par division euclidienne on trouve $S=X^2-2X-1$

$P = (X-\alpha)^2 (X-\bar{\alpha})^2 (X^2-2X-1)$

$P = (X-(1-i))^2 (X-(1+i))^2 (X-(1-\sqrt{2}))(X-(1+\sqrt{2}))$

c'est la decomposition de P en polynome irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Dans $\mathbb{R}[X]$.

on a $P = (X-\alpha)^2(X-\bar{\alpha})^2(X^2-2X-1)$

$P = ((X-\alpha)(X-\bar{\alpha}))^2 (X-(1-\sqrt{2}))(X-(1+\sqrt{2}))$

$= (X^2-2X+2)^2 (X-(1-\sqrt{2}))(X-(1+\sqrt{2}))$

on a : $\Delta(X^2-2X+2)<0$ danc le composition de P danc $\mathbb{R}[X]$

$P = (X^2-2X+2)^2 (X-(1-\sqrt{2}))(X-(1+\sqrt{2}))$

Exercice 5 :

Soit la polynôme $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$

1) Détérminons le degré de P.

on a: $(X+1)^7 = C_7^0 X^0 + C_7^1 X^1 + C_7^2 X^2 + C_7^3 X^3 + C_7^4 X^4 + C_7^5 X^5 + C_7^6 X^6 + C_7^7 X^7$

alors $P = \cancel{1} + 7X + 21X^2 + 35X^3 + 35X^4 + 21X^5 + 7X^6 + X^7 - X^7 - 1$

alors $dP^\circ = 6$

2) vérifions que P admet au moins de racine dans $\mathbb{Z}$.

on remarque que $P(0) = 0$ et $P(-1) = 0$

donc 0 et -1 sont deux racine dans $\mathbb{Z}$ de P

3) Montrons que $(X-j)$ divise P.

j est une racine 3^{em} de l'unité c'est-à-dire ($j^3 = 1$) en ~~ou~~ encore j est une racine du polynôme $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$

on a $j^2+j+1=0$; on a $X-j / P \Leftrightarrow P(j)=0$; ~~P(j)~~

$P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^7 - 1 = -(j^3)^4 j^2 - (j^3)^2 \cdot j - 1$

$= -j^2 - j - 1 = 0$ alors j est une racine de P.

4) Décomposons P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans $\mathbb{C}[X]$:

On a $P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$ et $P'(j) = 7(j+1)^6 - 7j^6$

$P'(j) = 7(-j^2)^6 - 7j^6 = 7(j^3)^4 - 7(j^3)^2 = 7 - 7 = 0$

$\Rightarrow P = (X-j)^2(X-\bar{j})^2 X(X+1)$

c'est la decomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Dans $\mathbb{R}[X]$

on a $P = (X-j)^2(X-\bar{j})^2 X(X+1) = ((X-j)(X-\bar{j}))^2 X(X+j)$

$P = (X^2+X+1)^2 X(X+1)$, or $\Delta(X^2+X+1) < 0$

donc la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P \doteq (X^2+X+1)^2 X(X+1)$$

Exercice 6 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

1) Détérminons tous les polynômes de la forme $P = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$ ayant un zéro d'ordre 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine d'ordre 3 de P

$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ et $P^{(3)}(\alpha) \neq 0$

on a $P' = 15X^4 - 30X^2 + a$ et $P'' = 60X^3 - 60X$

$P'' = 60X(X^2-1) = 60X(X-1)(X+1)$

si $\alpha = 0$ on a $P(0) = b = 0$ et $P'(0) = a = 0$

$\Rightarrow P = 3X^5 - 10X^3$ et $P^{(3)} = 180X^2 - 60$

$P^{(3)}(0) = -60 \neq 0$ alors α est bien une racine d'ordre 3 de $P = 3X^5 - 10X^3 = X^3(3X^2 - 10) = X^3(\sqrt{3}X - \sqrt{10})(\sqrt{3}X + \sqrt{10})$

1.i) $\alpha = 1$

$P(1) = 3 - 10 + a + b = 0 = -7 + a + b$

$P'(1) = -15 + a = 0 \Rightarrow a = -15$ et $b = -8$

alors $P = 3X^5 - 10X^3 + 15X - 8$

$P^{(3)} = 180X^2 - 60 \Rightarrow P^{(3)}(1) = 120 \neq 0$

$\alpha = 1$ est bien une racine de $P = 3X^5 - 10X^3 + 15X - 8$

d'ordre 3 est $P = (X-1)^3(3X^2+9X+8)$

$\Delta(3X^2+9X+8) < 0$ donc la composition de P dans

$\mathbb{R}[X]$ est $P = (X-1)^3(3X^2+9X+8)$

iii) $\alpha = -1 = 7 - a + b = 0$

$P'(-1) = -15 + a = 0 \Rightarrow P = 3X^5 - 10X^3 + 15X + 8$

$P^{(3)} = 180X^2 - 60 \Rightarrow P^{(3)}(-1) = 120 \neq 0$

$\alpha = -1$ est bien une racine de $P = 3X^5 - 10X^3 + 15X + 8$

d'ordre 3 et $P = (X+1)^3(3X^2 - 9X + 8)$

donc la composition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = (X+1)^3(3X^2 - 9X + 8)$$

Exercice 7 :

1) $P = 4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$

si α est une racine multiple de P alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$

on a : $P' = 12X^2 - 32X - 19$: $\Delta = (44)^2$

alors $\frac{-1}{2}$ est une racine de P et on a $P(\frac{-1}{2}) = P'(\frac{-1}{2}) = 0$

$\Rightarrow \frac{-1}{2}$ est une racine multiple de P

alors $P = (X + \frac{1}{2})^2(4X - 20) = (X-5)(2X+1)^2$

2) Décomposons dans $\mathbb{R}[X]$ les polynôme suivants sachant qu'ils ont une racine réelle commune

$A = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ $B = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$

~~on a~~ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine commune á A et B

On a $X - \alpha / A$ et $X - \alpha / B$ alors $(X-\alpha) / \text{pgcd}(A,B)$

Par l'algorithme d'Euclide on a $\text{pgcd}(A,B) = (X-3)$

$X - \alpha / X - 3 \Rightarrow \alpha = 3$

donc $A = (X-3)(X-2)(X-4)$

$B = (X-3)(X+1)(X-5)$

2).) Soient $A = X^4+6X^3+10X^2+3X-6$

et $B = X^2+3X$

on a $A = (X^2+3X+1)B-6 = (B+1)B-6 = B^2+B-6$

$= (B+3)(B-2)$

$A = (X^2+3X+3)(X^2+3X-2)$

..) la factorisation de A dans $\mathbb{Q}[X]$:

$\Delta(X^2+3X+3) < 0$ alors X^3+3X+3 est irreductible dans $\mathbb{R}[X]$ et donc irreductible dans $\mathbb{Q}[X]$. et (X^2+3X-2) est irreductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

donc la décomposition de A dans $\mathbb{Q}[X]$:

$A = (X^2+3X+3)(X^2+3X-2)$

dans $\mathbb{R}[X]$:

$A = (X^2+3X+3)(X^2+3X-2)$

$\Delta(X^2+3X+3) < 0$ et $X^2+3X-2 = \left(X+\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(X+\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$

donc la decomposition de A dans $\mathbb{R}[X]$:

est : $A = (X^2+3X+3)\left(X+\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(X+\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$

Exercice 8 :

On considère le polynôme $P = X^4-6X^3+9X^2+9$

1) Décomposons $X^4-6X^3+9X^2$ en produits de facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

on pose $Q = X^4-6X^3+9X^2$

$Q = X^2(X^2-6X+9) = X^2(X-3)^2$

2) on a : $P = Q+9 = X^2(X-3)^3+9 = X^2(X-3)^2-(3i)^2$

$P = (X^2-3X-3i)(X^2-3X+3i)$

i) Decomposons P dans $\mathbb{C}[X]$:

on pose $P_1 = X^2 - 3X - 3i$; $\Delta(P_1) = 9 + 12i = \left(\sqrt{3}(2+i)\right)^2$

$$\alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{3}(2+i)}{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{3}(2+i)}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

et on pose $P_2 = (X^2 - 3X + 3i)$

$\Delta(P_2) = 9 - 4.(+3i) = 9 - 12i = \left(\sqrt{3}(2-i)\right)^2$

$\beta_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\beta_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \beta_1)(X - \beta_2)$$

$$P = \left(X - \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(X - \frac{3}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(X - \frac{3}{2} - \sqrt{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2} + \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

c'est la decomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$.

ii) Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\left((X - \alpha_1)(X - \beta_1)\right)\left((X - \alpha_2)(X - \beta_2)\right)$$

$$P = \left(X^2 - (2\sqrt{3} + 3)X + 3\sqrt{3} + 6\right) \times \left(X^2 + (2\sqrt{3} - 3)X - 3\sqrt{2} + 6\right)$$

Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions suivantes:

(a) $F_1(X) = \dfrac{8X^4+8}{(X-1)^3(X+1)^3}$

(b) $F_2(X) = \dfrac{X^8-1}{(X^2+2X+2)^3}$

(a) $F_1(X)$ s'écrit

$$F_1(X) = \frac{a_1}{(X-1)} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{b_1}{(X+1)} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_3}{(X+1)^3}$$

• Pour déterminer a_1, a_2 et a_3, on pose $Y = X-1$, c'est-à-dire $X = Y+1$, et on fait la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $(Y+1)^4+1$ par $(Y+2)^3$ à l'ordre 2. On a

$$(Y+1)^4+1 = 2+4Y+6Y^2+4Y^3+Y^4 \text{ et } (Y+2)^3 = 8+12Y+6Y^2+Y^3.$$

On trouve

$$(Y+1)^4+1 = (Y+3)^3(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}Y+\frac{3}{8}Y^2)+Y^3R(Y)$$

en multipliant par 8, on trouve $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

• Pour déterminer b_1, b_2 et b_3 , on pose $Z = X+1$, c'est-à-dire $X = Z-1$, et on fait la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $(Z-1)^4+1$ par $(Z-2)^3$ à l'ordre 2. On a

$$(Z-1)^4+1 = 2-4Z+6Z^2-4Z^3+Z^4 \text{ et } (Z-2)^3 = -8+12Z-6Z^2+Z^3.$$

On trouve

$$(Z-1)^4+1 = (-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}Z-\frac{3}{8}Z^2)(Z-2)^3+Z^3P(Z)$$

et en multipliant par 8, on obtient $b_1 = -3$, $b_2 = 1$ et $b_3 = -2$.

Finalement

$$\begin{aligned} F_1(X) &= \frac{8X^4+8}{(X-1)^3(X+1)^3} \\ &= \frac{3}{(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3} - \frac{3}{(X+1)}\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{(X+1)^3} \end{aligned}$$

(b) $F_2(X)$ s'écrit

$$F_2(X) = E(X) + \frac{a_1X + b_1}{(X^2+2X+2)} + \frac{a_2X + b_2}{(X^2+2X+2)^2} + \frac{a_3X + b_3}{(X^2+2X+2)^3}$$

On pose $A(X) = X^2 + 2X + 2$. Pour déterminer a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 et b_3 on fait les trois divisions euclidiennes suivantes:

$$X^8 - 1 = Q_1A + R_1 \quad \text{avec} \quad \text{degré}(R_1) < \text{degré}(A) = 2$$

$$Q_1 = Q_2A + R_2 \quad \text{avec} \quad \text{degré}(R_2) < \text{degré}(A) = 2$$

$$Q_2 = Q_3A + R_3 \quad \text{avec} \quad \text{degré}(R_3) < \text{degré}(A) = 2$$

En remplaçant on obtient

$$F_2(X) = \frac{X^8-1}{(X^2+2X+2)^3} = \frac{Q_1A + R_1}{A^3} = \frac{Q_1}{A^2} + \frac{R_1}{A^3}$$

$$F_2(X) = \frac{Q_2A + R_2}{A^2} + \frac{R_1}{A^3}$$

$$F_2(X) = \frac{Q_2}{A} + \frac{R_2}{A^2} + \frac{R_1}{A^3}$$

$$F_2(X) = \frac{Q_3A + R_3}{A} + \frac{R_2}{A^2} + \frac{R_1}{A^3}$$

$$F_2(X) = Q_3 + \frac{R_3}{A} + \frac{R_2}{A^2} + \frac{R_1}{A^2}$$

Puisque degré$(R_1) \leqslant 1$, degré$(R_2) \leqslant 1$ et degré$(R_3) \leqslant 1$, ceci est la décomposition en éléments simples de $F_3(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$. Après calculs, on obtient

$$\begin{aligned} F_3(X) &= \frac{X^8-1}{(X^2+2X+2)^3} \\ &= X^2 - 6X + 18 - \frac{32X+40}{X^2+2X+2} + \frac{32X}{(X^2+2X+2)^2} + \frac{15}{(X^2+2X+2)^3} \end{aligned}$$